

DRUŠTVO MATEMATIČARA SRBIJE

**REPUBLIČKI SEMINAR 2010.
O NASTAVI MATEMATIKE I RAČUNARSTVA U
OSNOVNIM I SREDNJIM ŠKOLAMA**

Gradimir Milovanović, Marija Stanić

Mathematica u nastavi matematike

Beograd/Kragujevac, 2010.

Uvod

Mathematica je programski paket za matematičke i druge primene. Primena paketa *Mathematica* se prostire u svim poljima nauke, u tehnologiji i biznisu. Ovaj programski paket ima velike mogućnosti. *Mathematica* je posebno pogodna za obradu numeričkih podataka, za simbolička procesiranja, kao i za grafičko prikazivanje podataka i funkcija.

Za razliku od klasičnih (proceduralnih) programskih jezika koji imaju mali broj ugrađenih matematičkih operacija (nekoliko desetina), *Mathematica* ima hiljade različitih operacija.

Mathematica je potpuno integrisano okruženje za tehnička izračunavanja. Često se kaže da nastanak paketa *Mathematica* obeležava početak modernog tehničkog izračunavanja. Počev od 1960-tih nastali su individualni paketi za specifična numerička, algebarska, grafička izračunavanja i druge potrebe. Međutim, *Mathematica* je ujedinila sve te aspekte u jedan koherentni sistem na jedinstveni način. Ključna ideja je bilo otkriće simboličkog programskog jezika koji može da manipuliše vrlo velikim opsegom objekata koji se pojavljuju u tehničkim izračunavanjima. Na tehničkom nivou, *Mathematica* se široko koristi kao najvažniji podvig softverskog inženjertstva. Predstavlja jednu od najvećih aplikacija koja je ikada razvijena i sadrži ogroman niz novih algoritama i važnih tehničkih inovacija. Među mnogim inovacijama je koncept interaktivnog dokumenta, poznat kao **notebook**.

Mathematica je matematički softver (jezik i paket) za simboličko i numeričko rešavanje problema iz svih poznatih oblasti matematike, fizike i drugih oblasti nauke, tehnologije, finansija, medicine, istraživanja, obrazovanja, itd. Namenjena je kako korisnicima (đacima, studentima, inženjerima) za rešavanje već poznatih, proučenih problema, tako i istraživačima koji je mogu upotrebiti za najkomplicovanije proračune i analize. *Mathematica* igra ključnu ulogu u mnogim važnim otkrićima i predstavlja bazu za brojne naučne radove. U inženjerstvu je postala standardni alat kako za istraživanja tako i za proizvodnju. U finansijama igra značajnu ulogu u razvitku finansijskog modelovanja i široko se koristi u mnogim problemima planiranja i analize. Takođe, njena uloga je važna u informatici i razvoju softvera.

Najveći deo korisnika paketa *Mathematica* jesu profesionalci u tehničkim naukama. Međutim, ona se aktivno koristi i u obrazovanju.

Mathematica je razvijena u softverskoj kompaniji Wolfram Research. Prva verzija se pojavila 1988. godine, a 1989. verzija *Mathematica* 2.0 za DOS operativni sistem. Verzija *Mathematica* 2.2 vezana je za Windows 3.11. Danas je aktuelna verzije 7.0.

Glavni deo softvera *Mathematica* je **Kernel** (jezgro) koje služi za obavljanje matematičkih operacija i radi nezavisno od računara na kome je instaliran. Korisnik postavlja svoje zahteve u radnom prostoru (*NoteBook*-beleška, sveska). Radni prostor je struktuirani interaktivni dokument koji se sastoji od niza ćelija (*cells*). Svaka ćelija je označena uglastom zagradom na desnoj strani dokumenta. Ćelija može da sadrži: tekst, formule ili grafiku. Radni prostor uspostavlja dvosmernu vezu između korisnika i jezgra, tj. važi:

KORISNIK ↔ RADNI PROSTOR ↔ JEZGRO.

Radni prostor prima podatke koje korisnik šalje. Kada se zatraži izračunavanje prosleđuje ih jezgru koje ih obrađuje. Zatim jezgro vraća rezultate koji se prikazuju u radnom prostoru. Za nove korisnikove zahteve, radni prostor stvara novu ćeliju. Izračunavanje ćelije se zahteva istovremenim pritiskom tastera *Shift* i *Enter*. Tada

se ćeliji dodeljuje oznaka oblika $In[n]$, gde je n odgovarajući prirodan broj. Rezultat se upisuje u novu ćeliju koja je označena sa $Out[n]$ i te dve ćelije se grupišu.

Primer. Ako otkucamo $1+1$ i pritisnemo $[Shift]$ i $[Enter]$. Dobijamo:

$In[1]:=1+1$
 $Out[1]=2$

Prekid računanja se postiže tasterima $[Alt][,]$ ili $[Alt][.]$. Računanje se može nastaviti naredbom $Return[]$.

Kako *Mathematica* pamti sve unose i rezultate od početka rada, ponekad je potrebno da se isprazni memorija. Najlakši način da se to postigne jesu naredbe *Quit* ili *Exit*, čime se prekida rad jezgra. To se može postići i pomoću glavnog menija, opcija *Evaluation*. Pri prvom sledećem izračunavanju, jezgro se pokreće iz početka.

Mathematica je programski jezik interpretatorskog tipa. U interaktivnom režimu rada interpretatora očekuje se unos od strane korisnika, obrađuje se uneti izraz, prikazuje se rezultat i ponovo se očekuje novi izraz za evaluaciju. Beskonačan ciklus u interpretatoru se odvija preko niza naredbi $In[n]:=$ i niza rezultata $Out[n]=$. Iza $:=$ korisnik unosi naredbu, a u liniji $Out[n]$ program prikazuje odgovarajući rezultat. Tasterima $[Shift][Enter]$ se naznačuje da je završen unos i tada može da počne obrada unetog izraza. Kao deo tog "glavnog ciklusa", *Mathematica* održava i koristi različite globalne objekte. Upotreba objekata iz globalnog okruženja zamenjuje promenljive parametre iz proceduralnih programskih jezika.

Za vreme rada korisnik može da pristupi svim prethodno unetim izrazima, kao i dobijenim rezultatima:

InString[n]	tekstualni oblik n -te ulazne linije
%n ili Out[n]	izraz n -te izlazne linije
%. . . % ili Out[-n]	izraz n -te izlazne linije, brojana od kraja

ARITMETIČKE OPERACIJE I BROJEVI

U paketu *Mathematica* se mogu koristiti uobičajene aritmetičke operacije koristeći prioritet prema standardnim matematičkim konvencijama. Prioritet se može promeniti upotrebom zagrada (i).

Mathematica može da radi sa velikim brojevima.

Racionalni brojevi se zapisuju u obliku *brojilac/imenilac*.

Realni brojevi se mogu zapisati u fiksnom ili eksponencijalnom zapisu:

- a) fiksni oblik: $\pm \text{celi.decimalni}$;
- b) eksponencijalni oblik: $\pm \text{mantisa} * \text{baza}^{\text{eksponent}}$.

Kompleksni brojevi se zapisuju u obliku $x+yI$, gde je I imaginarna jedinica, a x i y su proizvoljni realni brojevi.

Ako su među ulaznim podacima svi brojevi racionalni, rezultat će biti prikazan kao racionalan broj.

Postoje sledeći tipovi brojeva:

Integer	celi brojevi (<i>integers</i>) proizvoljne dužine
Rational	racionalni brojevi oblika <i>integer/integer</i> u najmanjoj formi
Real	približni realni brojevi sa proizvoljnom specificiranom tačnošću
Complex	kompleksan broj oblika $x+yi$, gde su x i y realni brojevi

Primer.

23.56+8.75

32.31

$(3/2-1/3)^2+2*1/5-1/6$

293/180

2/5+7 0.3

2.5

4¹⁸⁷

38478521676166483605741250097

79649785652318288131391276166

82552775837126674777447377092

44389536050430475222646784

1/3+1/9

4/9

Mogu se koristiti i brojni sistemi sa proizvoljnom osnovom. Zapis dekadnog broja n u sistemu sa bazom b dobija se funkcijom

BaseForm[n, b].

Približna vrednost broja dobija se primenom funkcije

N[*broj*, *broj_cifara*].

U paketu *Mathematica* argumenti svih funkcija pišu se unutar zagrada [i].

KONSTANTE

Veličine čija se vrednost ne može menjati u toku izvršavanja programa naziva se *konstanta*. Konstantama se mogu dodeljivati simbolička imena, koja se mogu koristiti umesto njih. Ovakve simboličke konstante sreću se i u programskim jezicima *PASCAL* (naredba *const*) i *C* (naredba *#define*). Simbolička konstanta u paketu *Mathematica* je deo globalnog okruženja. Poznate simboličke konstante imaju svoja posebna, rezervisana imena:

Pi	$\pi \approx 3.14159$
E	$e \approx 2.71828$
Degree	$\pi/180$: faktor konverzije stepena u radijane
I	$i = \sqrt{-1}$
Infinity	∞

Imena svih konstanti, kao i svih funkcija koje su definisane u paketu *Mathematica* počinju velikim slovom.

Primer.

N[1/3+1/9]

0.444444

N[Pi]

3.14159

N[1/1345]

0.000743494

N[E, 100]

2.718281828459045235360287471

35266249775724709369995957496

69676277240766303535475945713

82178525166427

N[1/3+1/9, 32]

0.444444444444444444444444444444

44444

N[Degree]

0.0174533

%%

0.000743494

I^2

-1

BaseForm[46, 2]

101110₂

1/Infinity

0

Pi

π

PROMENLJIVE

Promenljive su veličine koje menjaju svoju vrednost u programu. Svaka promenljiva ima svoje simboličko ime. Promenljive se nazivaju *simboli*, i predstavljaju osnovne imenovane objekte u jeziku *Mathematica*. Ime koje se koristi kao simbol mora da bude sekvenca slova i cifara, koja ne počinje cifrom. Velika i mala slova se razlikuju. Simbolima se ne može dodeliti ime postojećih funkcija i konstanti u paketu *Mathematica*. Vrednost simbola se definiše naredbom

promenljiva=izraz,

a briše naredbom

promenljiva=.

Specijalne dodele su analogne odgovarajućim dodelama u jeziku C:

i++, i--	povećanje (smanjenje) vrednosti promenljive <i>i</i> za 1
++i, --i	povećanje (smanjenje) vrednosti promenljive <i>i</i> za 1
i+=di, i-=di	povećanje (smanjenje) vrednosti promenljive <i>i</i> za <i>di</i>
x*=c, x/=c	množenje (deljenje) vrednosti promenljive <i>x</i> sa <i>c</i>

Primer.

a=1.3;

5a^2-3 a

4.55

i=3; ++i

4

y=5; y++

5

Pi=5

Set::wrsym : Symbol π is Protected. >>

5

y

6

FUNKCIJE

FUNKCIJE ZA RAD SA NUMERIČKIM VREDNOSTIMA

Funkcije za ispitivanje tipa broja imaju vrednost *True* ako je odgovor na ono što se testira potvrđan, a u suprotnom imaju vrednost *False*:

NumberQ[x]	testira da li je x broj bilo kog tipa
IntegerQ[x]	testira da li je x ceo broj (<i>integer</i>)
EvenQ[x]	testira da li je x paran broj
OddQ[x]	testira da li je x neparan broj
PrimeQ[x]	testira da li je x prost broj
Positive[x]	testira da li je x pozitivan broj
Negative[x]	testira da li je x negativan broj

Funkcije za konverziju numeričkih vrednosti iz jednog oblika u drugi:

N[x, n]	konvertuje x u približan realan broj sa najviše n cifara preciznosti
Rationalize[x]	racionalan broj koji predstavlja aproksimaciju za x
Rationalize[x, dx]	racionalan broj koji predstavlja aproksimaciju za x sa tolerancijom dx
Round[x]	ceo broj najbliži x
Floor[x]	najveći ceo broj ne veći od x
Ceiling[x]	najmanji broj ne manji od x
Sign[x]	1 za $x > 0$, -1 za $x < 0$ i 0 za $x = 0$
Abs[x]	apsolutna vrednost broja x

Primer.

Rationalize[N[Pi], 10⁻⁸]
100798/32085

Round[-2.4]
-2

PrimeQ[2011]
True

Floor[-2.4]
-3

Abs[-2.4]
2.4

Ceiling[-2.4]
-2

Funkcije za rad sa kompleksnim brojevima date su u sledećoj tabeli:

x+Iy	kompleksni broj $x+Iy$
Re[z], Im[z]	realni i imaginarni deo od z
Abs[z]	apsolutna vrednost
Conjugate[z]	konjugovano-kompleksan broj
Arg[z]	argument ϕ takav da je $z = z e^{i\phi}$

Celobrojne funkcije iz teorije brojeva:

Max [$x_1, x_2, \dots$] Max [$\{x_1, x_2, \dots\}$]	maksimum za $x_1, x_2, \dots$
Min [$x_1, x_2, \dots$] Min [$\{x_1, x_2, \dots\}$]	minimum za $x_1, x_2, \dots$
Mod [k, n]	ostatak pri deljenju k sa n
Quotient [m, n]	celobrojni deo od m/n
GCD [$n_1, n_2, \dots$]	najveći zajednički delilac (NZD) za $n_1, n_2, \dots$
LCM [$n_1, n_2, \dots$]	najmanji zajednički sadržalac (NZS) za $n_1, n_2, \dots$
IntegerDigits [n, b]	cifre broja n u bazi b
FactorInteger [n]	lista prostih faktora za n i njihovih eksponenata
Divisors [n]	lista prirodnih brojeva koji dele n
Prime [k]	k -ti prost broj
PrimePi [x]	broj $\pi(x)$ -kardinalni broj skupa prostih brojeva manjih od x

Primer.

Mod[100, 3]

1

```
Min[4.3, 3Sqrt[2], 2.5Sqrt[3]]
```

$$3\sqrt{2}$$

Max[4.3, 3Sqrt[2], 2.5Sqrt[3]]

4.33013

FactorInteger[2010]

$$\{\{2, 1\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{67, 1\}\}$$

FactorInteger[11111111111111111111111111111111111111]

(*41 jedinica*)

$$\{\{83, 1\}, \{1231, 1\}, \{538987, 1\}, \{201763709900322803748657942361, 1\}\}$$
Prime[1000000]

15485863

GCD[256, 36, 28]

4

PrimePi[100]

25

LCM[256, 36, 28]

16128

Osnovne kombinatorne funkcije:

n!	faktorijel
n!!	dupli faktorijel
Binominal[n,m]	$\binom{n}{m}$
Multinomial[n₁,n₂,...]	$\frac{(n_1 + n_2 + \dots)!}{n_1! n_2! \dots}$

Primer.

Binomial[10, 2]

45

Binomial[n, 3]

$$\frac{1}{6} (-2+n)(-1+n)n$$

1000!

40238726007709377354370243392300398571937486421071463254379991042
99385123986290205920442084869694048004799886101971960586316668729
94808558901323829669944590997424504087073759918823627727188732519
77950595099527612087497546249704360141827809464649629105639388743
78864873371191810458257836478499770124766328898359557354325131853
23958463075557409114262417474349347553428646576611667797396668820
29120737914385371958824980812686783837455973174613608537953452422
15865932019280908782973084313928444032812315586110369768013573042
16168747609675871348312025478589320767169132448426236131412508780
20800026168315102734182797770478463586817016436502415369139828126
48102130927612448963599287051149649754199093422215668325720808213
33186116811553615836546984046708975602900950537616475847728421889
67964624494516076535340819890138544248798495995331910172335555660
21394503997362807501378376153071277619268490343526252000158885351
47331611702103968175921510907788019393178114194545257223865541461
06289218796022383897147608850627686296714667469756291123408243920
81601537808898939645182632436716167621791689097799119037540312746
22289988005195444414282012187361745992642956581746628302955570299
02432415318161721046583203678690611726015878352075151628422554026
51704833042261439742869330616908979684825901254583271682264580665
26769958652682272807075781391858178889652208164348344825993266043
36766017699961283186078838615027946595513115655203609398818061213
85586003014356945272242063446317974605946825731037900840244324384
65657245014402821885252470935190620929023136493273497565513958720
55965422874977401141334696271542284586237738753823048386568897646
19273838149001407673104466402598994902222217659043399018860185665
26485061799702356193897017860040811889729918311021171229845901641
92106888438712185564612496079872290851929681937238864261483965738
22911231250241866493531439701374285319266498753372189406942814341
18520158014123344828015051399694290153483077644569099073152433278
28826986460278986432113908350621709500259738986355427719674282224
87575867657523442202075736305694988250879689281627538488633969099
59826280956121450994871701244516461260379029309120889086942028510
64018215439945715680594187274899809425474217358240106367740459574
17851608292301353580818400969963725242305608559037006242712434169
0900415369010593398383577793941097002775347200000000000000000000
00
00
00
00
00

Kvadratni koren broja x dobija se funkcijom

$Sqrt[x]$.

Primer.

Sqrt[75]

$5\sqrt{3}$

Sqrt[75.]

8.66025

Transcendentne funkcije:

Exp[z]	e^z
Log[z]	$\ln z$
Log[b, z]	$\log_b z$
Sin[z], Cos[z], Tan[z], Csc[z], Sec[z], Cot[z]	trigonometrijske funkcije sa uglovima u radijanima
ArcSin[z], ArcCos[z], ArcTan[z], ArcCsc[z], ArcSec[z], ArcCot[z]	inverzne trigonometrijske funkcije (rezultat u radijanima)
Sinh[z], Cosh[z], Tanh[z], Sech[z], Coth[z], Csch[z]	hiperboličke funkcije
ArcSinh[z], ArcCosh[z], ArcTanh[z], ArcSech[z], ArcCoth[z], ArcCsch[z]	inverzne hiperboličke funkcije

Primer.

N[Exp[Pi Sqrt[163]], 32]
2.62537412640768743999999999999
 9925×10^{17}

Log[E^8]
8

Log[2, 64]
6

Sin[30]
Sin[30]

N[%]
-0.988032

Sin[30 Degree]
 $1/2$

Cos[1.5]
0.0707372

Tan[Pi/4]
1

ArcTan[Infinity]
 $\pi/2$

ArcCot[1]
 $\pi/4$

KORISNIČKE FUNKCIJE

Pored toga što poseduje veliki broj ugrađenih funkcija, *Mathematica* omogućava korisniku da definiše i svoje funkcije. Funkcija više promenljivih se definiše izrazom:

$funkcija[x_, y_, z_, \dots] := izraz.$

Pri definisanju funkcija treba voditi računa da se argumenti navode u uglastim zagradama, a umesto znaka jednakosti stoji znak $:=$. Takođe, svaki element u listi parametara se završava znakom $'_'$.

Primer.

f[x_] := (1+x)^2
f[5]
36

g[x_, y_] := x+y
g[f[x], y]
 $(1+x)^2 + y$

FUNKCIJE ZA RAD SA LISTAMA

Svaka kolekcija izraza naziva se lista. Elementi liste se u paketu *Mathematica* pišu između zagrada { i }. Standardne funkcije za pristup određenim elementima liste su:

First[lista]	prvi element liste <i>lista</i>
Last[lista]	poslednji element liste <i>lista</i>
Part[lista, n] ili lista[[n]]	<i>n</i> -ti element liste <i>lista</i>
Part[lista, -n] ili lista[[-n]]	<i>n</i> -ti element liste <i>lista</i> , gledano od kraja
Part[lista, {n₁, n₂, ...}] ili lista[[n₁, n₂, ...]]	lista elemenata koji se nalaze u pozicijama <i>n₁, n₂, ...</i> u polaznoj listi <i>lista</i>
m[[i, j]]	(<i>i, j</i>)-ti element matrice <i>m</i>
m[[{i₁, ..., i_r}, {j₁, ..., j_s}}]	<i>r</i> × <i>s</i> submatrica matrice <i>m</i> sa elementima koji se nalaze u preseku vrsta <i>i₁, ..., i_r</i> i kolona <i>j₁, ..., j_s</i>

Funkcije za izdvajanje ili uklanjanje određenih delova u listi:

Take[lista, n]	izdvajanje prvih <i>n</i> elemenata iz liste <i>lista</i>
Take[lista, -n]	izdvajanje poslednjih <i>n</i> elemenata iz liste <i>lista</i>
Take[list, {m, n}]	izdvajanje elemenata <i>m</i> do <i>n</i> (uključujući <i>m</i> i <i>n</i>) lista
Drop[list, n]	lista <i>lista</i> bez svojih prvih <i>n</i> elemenata
Drop[list, -n]	lista <i>lista</i> bez svojih poslednjih <i>n</i> elemenata
Drop[list, {m, n}]	lista <i>lista</i> sa izbačenim elementima od pozicije <i>m</i> do <i>n</i>

Funkcije za dodavanje ili uklanjanje određenih elemenata iz liste su:

Prepend[lista, elem]	dodavanje <i>elem</i> na početak liste
Append[lista, elem]	dodavanje <i>elem</i> na kraj liste
Insert[lista, elem, i]	umetanje <i>elem</i> na <i>i</i> -to mesto liste
Insert[lista, elem, -i]	umetanje <i>elem</i> na <i>i</i> -to mesto od kraja liste
Insert[lista, elem, {i, j, ...}]	umetanje na { <i>i, j, ...</i> }-to mesto u listi
Delete[lista, i]	uklanjanje elementa sa <i>i</i> -tog mesta u listi
Delete[lista, -i]	uklanjanje elementa sa <i>i</i> -tog mesta gledano od kraja liste
Delete[lista, {i, j, ...}]	uklanjanje elementa sa { <i>i, j, ...</i> }-te pozicije u listi

Ukoliko aritmetičke funkcije imaju za svoj argument listu, one se primenjuju na svaki element te liste.

Apply[Plus, lista] ili Plus@@lista	sabiranje svih elemenata liste
Apply[Times, lista] ili Times@@lista	množenje svih elemenata liste

RELACIONI I LOGIČKI OPERATORI

Relacioni izrazi se koriste za upoređivanje vrednosti dva objekta. Kao rezultat primene ovih operatota, dobija se logička vrednost *True* ako je upoređivanje tačno, odnosno *False*, ako je upoređivanje netačno. Relacijski operatori su:

<code>x==y</code> ili <code>Equal[x,y]</code>	jednakost
<code>x=y=z</code>	jednakost više izraza
<code>x!=y</code>	nejednakost
<code>x!=y!=z</code>	nejednakost više izraza
<code>x>y</code>	veće
<code>x>y>z</code>	strogo opadajući izrazi
<code>x<y</code>	manje
<code>x<y<z</code>	strogo rastući izrazi
<code>x>=y</code>	veće ili jednako
<code>x<=y</code>	manje ili jednako

<code>expr₁ && expr₂ && ...</code>	evaluacija izraza $expr_i$ dok jedan od njih ne bude <i>False</i> , što je rezultat; ako su svi izrazi $expr_i$ jednaki <i>True</i> i rezultat je <i>True</i>
<code>expr₁ expr₂ ...</code>	evaluacija izraza $expr_i$ sve dok jedan od njih ne bude <i>True</i> , što je rezultat; inače, rezultat je <i>False</i>
<code>!p</code>	negacija izraza p
<code>Xor[p,q,...]</code>	ekskluzivna disjunkcija

Primer.

`v=5;u=v+4;w=u-3;`
`w>v`
 True

`f[x_]:= (x!=0 && 1/x<3)`
`f[2]`
 True

`w>v>u`
 False

`f[0]`
 False

SIMBOLIČKA IZRAČUNAVANJA

Ono što u najvećoj meri karakteriše programski paket *Mathematica* jesu velike mogućnosti u simboličkoj obradi podataka. Algebarskim formulama se može manipulirati kao sa brojevima.

Primer.

`4x^2-2x^2+3x+x+1`
`1+4x+2x2`

`t=5Second`
`5Second`

`a=5Meter/Second^2`
`(5Meter)/Second2`

`v=a t`
`(25Meter)/Second`

Transformacije izraza u paketu *Mathematica* nisu bazirane na njihovom algebarskom značenju, već na njihovoj strukturi.

Pravilo zamene je oblika:

izraz/.promenljiva->vrednost.

Primer.

$v = 3x + x^2 - 2x - 2x^3 - 3x^2$
 $x - 2x^2 - 2x^3$

x
 x

$v /. x \rightarrow 3$
 -69

v
 $x - 2x^2 - 2x^3$

$v /. x \rightarrow (1+q)$
 $1+q - 2(1+q)^2 - 2(1+q)^3$

$x+y /. \{ \{x \rightarrow 1, y \rightarrow 2\}, \{x \rightarrow 4, y \rightarrow 2\} \}$
 $\{3, 6\}$

ALGEBARSKIE TRANSFORMACIJE

Postoji više načina za zapis nekih algebarskih izraza. Na primer, izraz $(1+x)^2$ se može napisati i u obliku $1+2x+x^2$. Sledeće funkcije se mogu koristiti za konvertovanje između različitih oblika algebarskih izraza:

Expand[poly]	ekspanzija proizvoda i stepena u polinomu <i>poly</i>
Factor[poly]	faktorizacija izraza <i>poly</i>
FactorTerms[poly]	izdvajanje zajedničkih faktora u <i>poly</i>
Collect[poly, x]	zapis polinoma u obliku sume stepena promenljive <i>x</i>
Collect[poly, {x, y, ...}]	zapis polinoma u obliku sume stepena od <i>x, y, ...</i>
PowerExpand[expr]	ekspanzija $(ab)^c$ i $(a^b)^c$ u <i>expr</i>

Funkcije za ispitivanje strukture polinoma:

PolynomialQ[expr, x]	testira da li je <i>expr</i> polinom od <i>x</i>
PolynomialQ[expr, {x₁, x₂, ...}]	testira da li je <i>expr</i> polinom od <i>x_i</i>
Variables[poly]	lista promenljivih u <i>poly</i>
Length[poly]	ukupan broj terama u <i>poly</i>
Exponent[poly, x]	maksimalni eksponent sa kojim se <i>x</i> pojavljuje u <i>poly</i>
Coefficient[poly, expr]	koeficijent uz <i>expr</i> u <i>poly</i>
Coefficient[poly, expr, n]	koeficijent uz <i>expr</i> ^{<i>n</i>} u <i>poly</i>
Coefficient[poly, expr, 0]	koeficijent u <i>poly</i> koji je nezavisan od <i>expr</i>
CoefficientList[poly, {x₁, x₂, ...}]	generiše listu koeficijenata uz <i>x_i</i> u <i>poly</i>

Funkcije za algebarske operacije sa polinomima:

PolynomialQuotient [<i>poly</i> ₁ , <i>poly</i> ₂ , <i>x</i>]	količnik deljenja polinoma <i>poly</i> ₁ po <i>x</i> polinomom <i>poly</i> ₂ , pri čemu se odbacuje ostatak
PolynomialRemainder [<i>poly</i> ₁ , <i>poly</i> ₂ , <i>x</i>]	ostatak deljenja polinoma <i>poly</i> ₁ po <i>x</i> polinomom <i>poly</i> ₂
PolynomialGCD [<i>poly</i> ₁ , <i>poly</i> ₂]	NZD dva polinoma
PolynomialLCM [<i>poly</i> ₁ , <i>poly</i> ₂]	NZS dva polinoma
PolynomialMod [<i>poly</i> , <i>m</i>]	redukcija <i>poly</i> po modulu <i>m</i>

Funkcije za transformacije racionalnih algebarskih izraza:

Numerator [<i>expr</i>]	brojilac u razlomku <i>expr</i>
Denominator [<i>expr</i>]	imenilac u razlomku <i>expr</i>
ExpandNumerator [<i>expr</i>]	ekspanzija brojioca
ExpandDenominator [<i>expr</i>]	ekspanzija imenioca
Expand [<i>expr</i>]	ekspanzija brojioca, pri čemu se svaki term deli imeniocem
ExpandAll [<i>expr</i>]	ekspanzija i brojioca i imenioca
Together [<i>expr</i>]	svođenje na NZS u izrazu <i>expr</i>
Apart [<i>expr</i>]	ispisuje izraz u obliku sume terama sa prostim imeniocima
Cancel [<i>expr</i>]	skraćivanje zajedničkih faktora brojioca i imenioca
Factor [<i>expr</i>]	faktorizaciju
Apart [<i>expr</i> , <i>var</i>]	parcijalna dekompozicija razlomaka u odnosu na različite varijable

Funkcije za uprošćavanje algebarskih izraza su:

Simplify [<i>expr</i>]	najjednostavniji oblik izraza <i>expr</i> pomoću algebarskih transformacija
FullSimplify [<i>expr</i>]	najjednostavniji oblik izraza <i>expr</i> dobijen primenom svih poznatih transformacija

Primer.

$$a = \frac{(x-2)(x-1)}{((x-4)^2(x^2-4)(x+3))} \\ \frac{((-2+x)(-1+x))}{((-4+x)^2(3+x)(-4+x^2))}$$

Numerator[*a*]

$$(-2+x)(-1+x)$$

Denominator[*a*]

$$(-4+x)^2(3+x)(-4+x^2)$$

Expand[*a*]

$$\frac{2}{((-4+x)^2(3+x)(-4+x^2))} - \frac{(3x)}{((-4+x)^2(3+x)(-4+x^2))} \\ + \frac{x^2}{((-4+x)^2(3+x)(-4+x^2))}$$

Cancel[a]

$$(-1+x)/((-4+x)^2(6+5x+x^2))$$

Factor[a]

$$(-1+x)/((-4+x)^2(2+x)(3+x))$$

$$b=(x-3)/(x-1)+(x^2-2x+1)/(x+2)+(x^2+4x+4)/(x^2-4) \\ (-3+x)/(-1+x)+(1-2x+x^2)/(2+x)+(4+4x+x^2)/(-4+x^2)$$

Together[b]

$$(10-11x+9x^2-3x^3+x^4)/((-2+x)(-1+x)(2+x))$$

Apart[b]

$$-2/4/(-2+x)-2/(-1+x)+x+9/(2+x)$$

Simplify[b]

$$(10-11x+9x^2-3x^3+x^4)/(4-4x-x^2+x^3)$$

FullSimplify[b]

$$-2/4/(-2+x)-2/(-1+x)+x+9/(2+x)$$

Factor[6x^3+5x^2-6x-5]

$$(-1+x)(1+x)(5+6x)$$

c=Expand[(x-3)^4(y+2)^3-y(y+x)^2]

$$648-864x+432x^2-96x^3+8x^4+972y-1296xy+647x^2y-144x^3y+12x^4y+486y^2-650xy^2+324x^2y^2-72x^3y^2+6x^4y^2+80y^3-108xy^3+54x^2y^3-12x^3y^3+x^4y^3$$

Collect[c,y]

$$648-864x+432x^2-96x^3+8x^4+(972-1296x+647x^2-144x^3+12x^4)y+ \\ (486-650x+324x^2-72x^3+6x^4)y^2+(80-108x+54x^2-12x^3+x^4)y^3$$

Coefficient[c,x^3]

$$-96-144y-72y^2-12y^3$$

Exponent[c,x]

4

TRIGONOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE

Funkcije za transformacije trigonometrijskih izraza su:

TrigExpand[expr]	ekspanzija trigonometrijskog izraza
TrigFactor[expr]	faktorizacija trigonometrijskog izraza
TrigReduce[expr]	redukcija trigonometrijskih izraza korišćenjem višestrukih uglova
TrigToExp[expr]	trigonometrijska funkcija se predstavlja preko eksponencijalnih funkcija
ExpToTrig[expr]	eksponencijalna funkcija se predstavlja preko trigonometrijskih funkcija

Primer.

TrigExpand[Tan[x]Cos[2x]]

$3/2\cos[x]\sin[x] - \tan[x]/2 - 1/2\sin[x]^2\tan[x]$

TrigFactor[%]

$2\sin[\pi/4 - x]\sin[\pi/4 + x]\tan[x]$

TrigReduce[%]

$-1/2\sec[x](\sin[x] - \sin[3x])$

TrigToExp[%]

$-(1/2i(e^{-ix} - e^{ix}) - 1/2i(e^{-3ix} - e^{3ix}))(e^{-ix} + e^{ix})$

SUME I PROIZVODI

Paket *Mathematica* može da računa konačne i beskonačne sume i proizvode:

Sum[f, {i, i_{min}, i_{max}}]	zbir $\sum_{i=i_{\min}}^{i=i_{\max}} f$
Sum[f, {i, i_{min}, i_{max}, di}]	zbir u kome se <i>i</i> povećava za <i>di</i>
Product[f, {i, i_{min}, i_{max}}]	proizvod $\prod_{i=i_{\min}}^{i=i_{\max}} f$

Primer.

Sum[i^2, {i, 1, 10}]

385

Sum[1/i^2, {i, 1, Infinity}]

$\pi^2/6$

Sum[i^3, {i, 1, n}]

$1/4 n^2(1+n)^2$

Sum[1/i, {i, 1, Infinity}]

Sum::div :Sum does not converge.>>

Sum[(2 i - 1)^2, {i, 1, n}]

$1/3 n(-1+2n)(1+2n)$

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$

Sum[(2 i)^2, {i, 1, n}]

$2/3 n(1+n)(1+2n)$

Product[i^2/2^i, {i, 1, n}]

$2^{-1/2 n(1+n)} (n!)^2$

REŠAVANJE JEDNAČINA

U paketu *Mathematica* jednačine se tretiraju kao logičke naredbe. Na primer, jednačina $x^2+x=2$ tretira se kao logička naredba kojom se izraz x^2+x upoređuje sa 2. Ako se dodeli eksplicitna vrednost za *x*, npr. $x=4$, *Mathematica* može da eksplicitno determiniše da je vrednost logičke naredbe $x^2+x==2$ jednaka *False*. Ako eksplicitna vrednost za *x* nije dodeljena, *Mathematica* neće računati vrednost izraza $x^2+x==2$,

već ostavlja jednačinu u simboličkoj formi. Jednačine se mogu kombinovati kao i logičke naredbe, a takođe se mogu izračunavati i njihova rešenja.

Jednačine se mogu rešavati funkcijom *Solve*. Na primer, izrazom

$$\text{Solve}[\text{izraz1} == \text{izraz2}, x]$$

izračunava se vrednost x koja zadovoljava jednačinu $\text{izraz1} == \text{izraz2}$. Eksplicitne formule se dobijaju za polinomne jednačine stepena manjeg od 5, za neke polinomne jednačine specijalnog oblika stepena višeg od 5, kao i za trigonometrijske jednačine. Ako jednačina ima više rešenja, ne moraju se dobiti sva.

Ako se zahtevaju numerička rešenja jednačine, umesto funkcije *Solve* može se koristiti funkcija *NSolve*.

Primer.

Solve[$x^2 - 2x + 1 == 0$, x]

{{ $x \rightarrow 1$ }, { $x \rightarrow 1$ }}

Solve[$x^3 == -1$, x]

{{ $x \rightarrow -1$ }, { $x \rightarrow (-1)^{(1/3)}$ },
{ $x \rightarrow -(-1)^{(2/3)}$ }}

N[%]

{{ $x \rightarrow -1.$ },
{ $x \rightarrow 0.5 + 0.866025i$ },
{ $x \rightarrow 0.5 - 0.866025i$ }}

Solve[$x^3 \rightarrow -1.0$, x]

{{ $x \rightarrow -1.$ },
{ $x \rightarrow 0.5 - 0.866025i$ }, { $x \rightarrow 0.5 + 0.866025i$ }}

Solve[$x^6 - 64 == 0$, x]

{{ $x \rightarrow -2$ }, { $x \rightarrow 2$ }, { $x \rightarrow -2(-1)^{(1/3)}$ },
{ $x \rightarrow 2(-1)^{(1/3)}$ }, { $x \rightarrow -2(-1)^{(2/3)}$ },
{ $x \rightarrow 2(-1)^{(2/3)}$ }}

NSolve[$61x^8 - 34x^7 + 4x^6 - 2x^3 - 51x + 101 == 0$, x]

{{ $x \rightarrow -0.964079 - 0.448083i$ }, { $x \rightarrow -0.964079 + 0.448083i$ },
{ $x \rightarrow -0.299184 - 1.02429i$ }, { $x \rightarrow -0.299184 + 1.02429i$ },
{ $x \rightarrow 0.540679 - 0.930513i$ }, { $x \rightarrow 0.540679 + 0.930513i$ },
{ $x \rightarrow 1.00127 - 0.329043i$ }, { $x \rightarrow 1.00127 + 0.329043i$ }}

Funkcijom

$$\text{Solve}[\{\text{izraz1} == \text{izraz2}, \text{izraz3} == \text{izraz4}, \dots\}, \{x, y, \dots\}]$$

mogu se rešavati sistemi jednačina. Tako se dobija jedno rešenje datog sistema po promenljivim $x, y, \dots$, iako može postojati više rešenja. Ako sistem nema rešenja, kao izlaz se dobija prazna lista. Ukoliko rešenja postoje samo za specijalne vrednosti parametara, one se određuju funkcijom

$$\text{Reduce}[\{\text{izraz1} == \text{izraz2}, \text{izraz3} == \text{izraz4}, \dots\}, \{x, y, \dots\}]$$

Takođe, ako sistem ima više rešenja, mogu se dobiti funkcijom *Reduce*. Funkcijom

$$\text{Eliminate}[\{\text{izraz1} == \text{izraz2}, \text{izraz3} == \text{izraz4}, \dots\}, \{x, y, \dots\}]$$

može se sistem jednačina pojednostaviti koristeći eliminaciju navedenih promenljivih.

Primer.

Solve[{x²==4, x==a}, x]
{}

Reduce[ax==b, x]
(b==0&&a==0) || (a!=0&&x==b/a)

Reduce[{x²==4, x==a}, x]
(a== -2&&x== -2) || (a==2&&x==2)

Eliminate[{3x+6y==2, bx+2y==3}, y]
7+3x==3bx

Reduce[Cos[x]==1/2, x]
C[1]∈Integers&&(x== -π/3+2πC[1] || x==π/3+2πC[1])

GRANIČNE VREDNOSTI

Funkcije za određivanje graničnih vrednosti su:

Limit [f, x->x ₀]	granična vrednost funkcije f kada $X \rightarrow X_0$
Limit [f, x->x ₀ , Direction->1]	granična vrednost funkcije f kada $X \rightarrow X_0$ sa leve strane
Limit [f, x->x ₀ , Direction->-1]	granična vrednost funkcije f kada $X \rightarrow X_0$ sa desne strane

Primer.

Limit[1/(x-2), x->2, Direction->-1]

∞

Limit[1/(x-2), x->2, Direction->1]

-∞

Limit[(1-Cos[x]^Sin[x])/x^3, x->0]

1/2

DIFERENCIRANJE

Funkcije za numeričko i simboličko diferenciranje su:

D [f, x]	parcijalni izvod $\frac{\partial f}{\partial x}$
D [f, x ₁ , x ₂ , ...]	višestruki izvod $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots f$
D [f, {x, n}]	n-ti parcijalni izvod $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$
f' [x], f'' [x], f''' [x]	prvi, drugi i treći izvod funkcije f jedne promenljive
f⁽ⁿ⁾ [x]	n-ti izvod funkcije jedne promenljive
f^(n1, n2, ...) [x]	izvod funkcije više promenljivih, n_i puta u odnosu na i -tu promenljivu

Primer.

D[Cos[x], {x, 3}]
 $\sin[x]$

D[x^2+2xg[x^2], x]
 $2x+2g[x^2]+4x^2g'[x^2]$

D[g[x], x]
 $g'[x]$

D[g[x^2, y^2], x]
 $2xg^{(1,0)}[x^2, y^2]$

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Diferencijalne jednačine i sistemi diferencijalnih jednačina u čisto funkcionalnom obliku rešavaju se funkcijom *DSolve*:

DSolve[eqn, y[x], x]	rešava diferencijalnu jednačinu za $y[x]$, smatrajući x za nezavisnu promenljivu
DSolve[{eqn₁, eqn₂, ...}, {y₁, y₂, ...}, x]	rešava sistem diferencijalnih jednačina

Primer.

DSolve[y'[x]==ay[x], y[x], x]
 $\{\{y[x] \rightarrow (e^{ax}C[1])\}\}$

DSolve[{y'[x]==ay[x], y[0]==1}, y[x], x]
 $\{\{y[x] \rightarrow (e^{ax})\}\}$

INTEGRACIJA

Funkcije za određivanje integrala su:

Integrate[f, x]	neodređeni integral $\int f(x)dx$
Integrate[f, {x, xmin, xmax}]	određeni integral $\int_{x \min}^{x \max} f(x)dx$
NIntegrate[f, x]	numerička aproksimacija integrala $\int f(x)dx$

Primer.

Integrate[1/(x^4+1), x]
 $(-2\text{ArcTan}[1-\sqrt{2}x]+2\text{ArcTan}[1+\sqrt{2}x]-\text{Log}[-1+\sqrt{2}x-x^2]+\text{Log}[1+\sqrt{2}x+x^2])/(4\sqrt{2})$

Integrate[x^n, x]
 $x^{1+n}/(1+n)$

Integrate[1/x, x]
 $\text{Log}[x]$

```
Integrate[Cos[x^2] Log[x], x]
1/4 (-2xHypergeometricPFQ[{1/2, 1/2}, {3/2, 3/2}, -i x^2]
-2xHypergeometricPFQ[{1/2, 1/2}, {3/2, 3/2}, i x^2]
-(-1)^(3/4) Sqrt[pi] (Erf[(-1)^(1/4)x]+Erfi[(-1)^(1/4)x])Log[x])
```

```
Integrate[Sin[x], {x, 0, Pi}]
2
```

```
Integrate[1/x^3, {x, -1, 1}]
Integrate::idiv : Integral of 1/x^3 does not converge on {-1,1}. >>

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx$$

```

```
Integrate[Log[x]^n, {x, 0, Pi}]
If[Re[n]>-1, (-1)^n((-1+(-1)^(2n))Gamma[1+n]+Gamma[1+n, -Log[pi]]),
Integrate[Log[x]^n, {x, 0, pi}, Assumptions->Re[n]<=-1]]
```

GRAFIKA

Osnovna grafička funkcija u paketu *Mathematica* je *Plot*. Ona iscrtava proizvoljnu funkciju jedne promenljive u zadatom intervalu. Pored toga, moguće je i crtanje više različitih funkcija na istom grafiku.

Plot[f, {x, xmin, xmax}]	grafik funkcije f u zavisnosti od x u intervalu $[xmin, xmax]$
Plot[{f₁, f₂, ...}, {x, xmin, xmax}]	crtanje više funkcija zajedno

Postoje dva načina na koje *Mathematica* može da nacrti grafik funkcije $f(x)$. Prvi način je da se funkcija prvo izvrši, kako bi se eventualno dobio jednostavniji izraz, koji se zatim izračunava nad nizom konkretnih vrednosti za x . Drugi način je da se prvo odredi niz vrednosti x , a zatim da se funkcija izvrši za svaku od tih vrednosti. Ako se pozove funkcija *Plot* izrazom *Plot[f, {x, xmin, xmax}]*, *Mathematica* postupa na drugi način, tj. prvo bira neki niz vrednosti x iz datog intervala, a zatim izračunava funkciju za svaku od njih. Međutim, u nekim slučajevima je pogodnije da se crtanje obavi na prvi način, što se vrši pozivom funkcije

Plot[Evaluate[f], {x, xmin, xmax}].

Rezultat grafičkih funkcija je objekat *-Graphics-*, koji sadrži sve podatke o nacrtanom grafiku. Objekat *-Graphics-* se može ponovo prikazati na ekranu funkcijom *Show*. Sa njim se može postupati isto kao i sa svim drugim objektima u paketu *Mathematica* (može se dodeliti promenljivoj, elementu niza, staviti u listu itd.).

g=Plot[f, ...]	dodeljivanje grafika simbolu g
Show[g]	prikazivanje grafika dodeljenog simbolu g
Show[g1, g2, ...]	prikazivanje više grafika zajedno

Mathematica sadrži i funkcije za crtanje određenih grafičkih primitiva:

Point [{x,y}]	tačka na poziciji (x, y)
Line [{{x ₁ ,y ₁ },{x ₂ ,y ₂ },...}]	linija kroz tačke {x ₁ ,y ₁ },{x ₂ ,y ₂ },...
Rectangle [{xmin,ymin},{xmax,ymax}]	crtanje pravougaonika
Polygon [{{x ₁ ,y ₁ },{x ₂ ,y ₂ },...}]	crtanje poligona
Circle [{x,y},r]	krug sa centrom u (x, y) i poluprečnikom r

Mathematica pri crtanju grafika mora da izabere između mnogih mogućnosti: u kojim tačkama će računati funkciju, kako će nacrtati ose, i slično. U većini slučajeva *Mathematica* vrši pravilan izbor i daje zadovoljavajući crtež. Ponekad je, međutim, neophodno da korisnik sam podesi neke opcije, kako bi grafik dobio "željeni" izgled. U grafičkim funkcijama se kao poslednji argument može navesti niz pravila, kojima se podešavaju razne opcije:

Plot[f,{x,x_{min},x_{max}},opcija->vrednost].

Jednom dobijeni grafik se može ponovo prikazati na ekranu funkcijom *Show*, pri čemu se takođe može zadati niz opcija:

Show[% ,opcija₁->vrednost₁,opcija₂->vrednost₂,...].

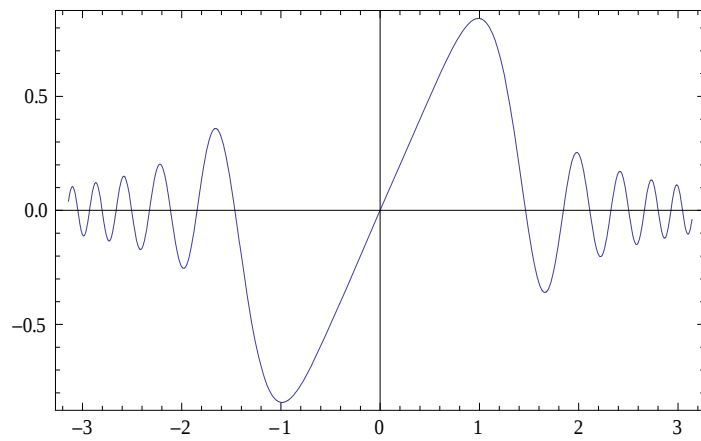
Opcije za dvodimenzionalne grafike i njihove standardne vrednosti su:

AspectRatio	1/GoldenRatio	odnos visine i širine grafika
Axes	True	iscrtavanje koordinantnih osa
AxesLabel	None	oznake za koordinantne ose
AxesOrigin	Automatic	tačka u kojoj se seku koordinantne ose
Frame	False	iscrtavanje okvira oko grafika
FrameLabel	None	oznake za okvir
FrameTicks	Automatic	koordinate koje treba obeležiti na okviru
GridLines	None	iscrtavanje pomoćnih linija
PlotLabel	None	naslov grafika
PlotPoints	25	najmanji broj tačaka u kojima se računa vrednost funkcije
PlotRange	Automatic	oblast grafika koji se prikazuje
Ticks	Automatic	koordinate koje treba obeležiti na koordinantnim osama

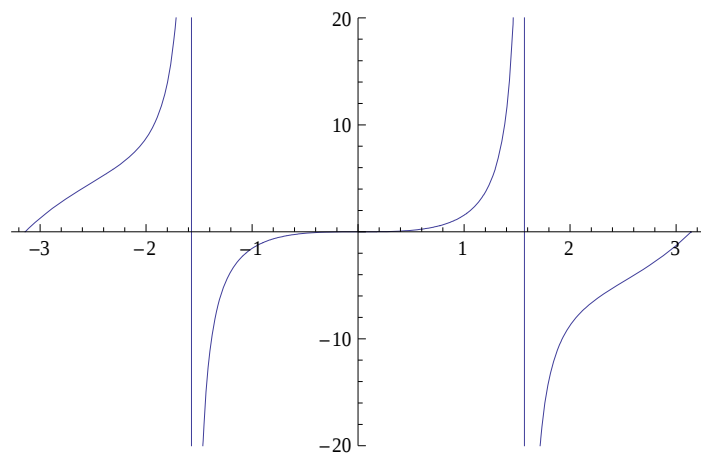
Koordinatne ose se postavljaju u koordinatni početak kad god je to moguće. Ukoliko to nije moguće, postavljaju se što bliže koordinatnom početku. Opcija *Automatic* omogućava da se tačka preseka koordinantnih osa bira automatski.

Primer.

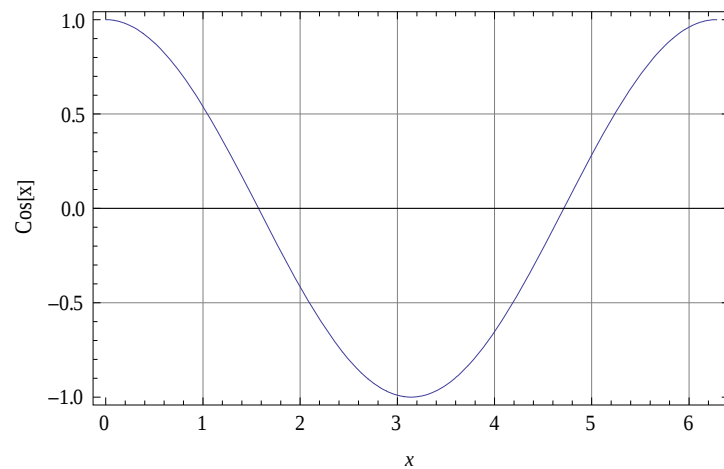
```
Plot[Sin[x^3]/x^2,{x,-Pi,Pi},Frame→True]
```



```
Plot[x^2 Tan[x],{x,-Pi,Pi},PlotRange→{-20,20}]
```



```
Plot[Cos[x],{x,0,2 Pi},GridLines→Automatic,Frame→True,  
FrameLabel→{x,"Cos[x]"}]
```



Način prikazivanja pojedinih krivih na grafiku zadaje se opcijom *PlotStyle*, koja sadrži listu stilova za svoju vrednost. Pojedinačne krive na grafiku se mogu iscrtavati različitim stilovima da bi se bolje razlikovale. Pritom se pod stilom podrazumeva lista grafičkih kontrolnih funkcija koje određuju izgled krive ili niza tačaka.

{gkf₁, gkf₂, ...}	lista grafičkih kontrolnih funkcija čini stil
PlotStyle->stil	stil koji se primenjuje na sve krive na grafiku
PlotStyle->{{stil₁},{stil₂},...}	stilovi koji se primenjuju na pojedinačne krive na grafiku

Grafičke kontrolne funkcije imaju efekat samo ako se navedu kao vrednosti opcija funkcije *PlotStyle*. Ovde su navedene samo neke od mnogobrojnih grafičkih kontrolnih funkcija:

GrayLevel[i]	nijansa sivog izmeu 0 (crno) i 1 (belo)
RGBColor[r, g, b]	boja određena crvenom, zelenom i plavom komponentom, svaka između 0 i 1
Hue[h]	boja <i>h</i> iz spektra
Hue[h, s, b]	boja <i>h</i> , zasićenje <i>s</i> i osvetljenje <i>b</i>
PointSize	prečnik tačke zadat relativno u odnosu na širinu celog grafika
AbsolutePointSize[d]	prečnik tačke u apsolutnim jedinicama
Thickness[r]	debljina linije u odnosu na širinu grafika
AbsoluteThickness[d]	debljina linije u apsolutnim jedinicama
Dashing[{r₁, r₂, ...}]	dužine segmenta za crtanje neprekidnih linija zadate u odnosu na širinu grafika
AbsoluteDashing[{d₁, d₂, ...}]	dužine segmenata u apsolutnim jedinicama

Debljina i način iscrtavanja neprekidnih linija, kao i prečnik tačaka se mogu zadati relativno u odnosu na širinu celog grafika ili u apsolutnim jedinicama. Apsolutna jedinica iznosi 1/72 inča, što približno odgovara visini jedne tačke na štampaču. Uobičajeni stilovi su navedeni u sledećoj tabeli:

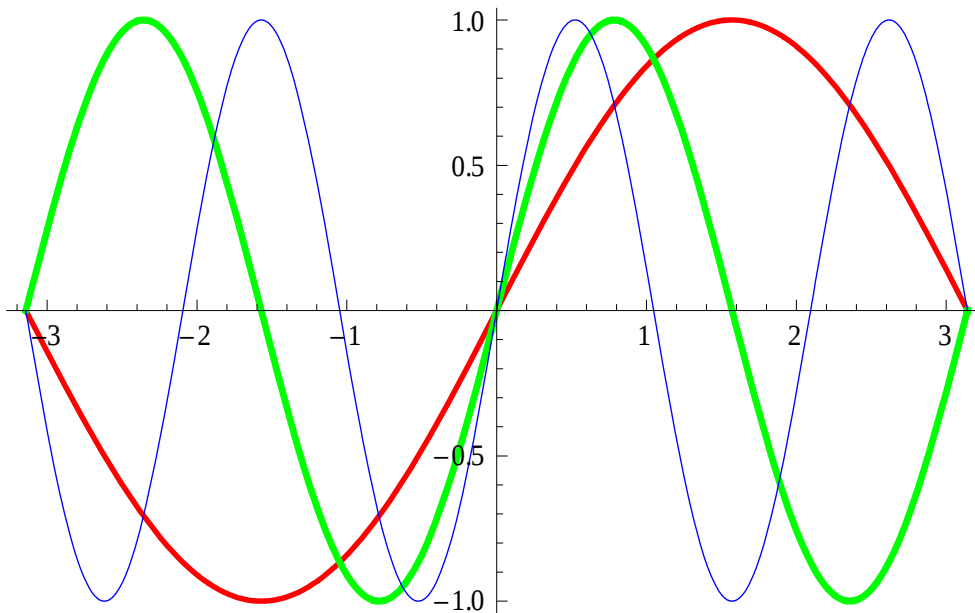
GrayLevel[0.5]	siva boja
RGBColor[1, 0, 0]	crvena boja
Thickness[.05]	debela linija
Dashing[{.05, .05}]	obična isprekidana linija
Dashing[{.01, .05, .05, .05}]	isprekidana linija sa tačkama

Opcije koje utiču na boje celog grafika su:

Background->boja	boja za pozadinu grafika
DefaultColor->boja	boja kojom se iscrtava grafik
ColorOutput->GrayLevel	generisanje crno-bele slike na monitoru u boji

Primer.

```
Plot[{Sin[x], Sin[2 x], Sin[3 x]}, {x, -Pi, Pi},
PlotStyle->{{RGBColor[1, 0, 0], AbsoluteThickness[2]},
{RGBColor[0, 1, 0], AbsoluteThickness[2.5]}, {RGBColor[0, 0, 1]}}
```



Paket Mathematica radi i sa trodimenzionalnom grafikom, a osnovna funkcija za crtanje trodimenzionalne grafike je *Plot3D*, koja je analogna funkciji *Plot*. Naravno, umesto jedne promenljive u dvodimenzionalnom slučaju, ovde imamo dve promenljive:

$$Plot3D[f, \{x, xmin, xmax\}, \{y, ymin, ymax\}].$$

Takodje, postoje i posebne funkcije za crtanje osnovnih trodimenzionalnih oblika:

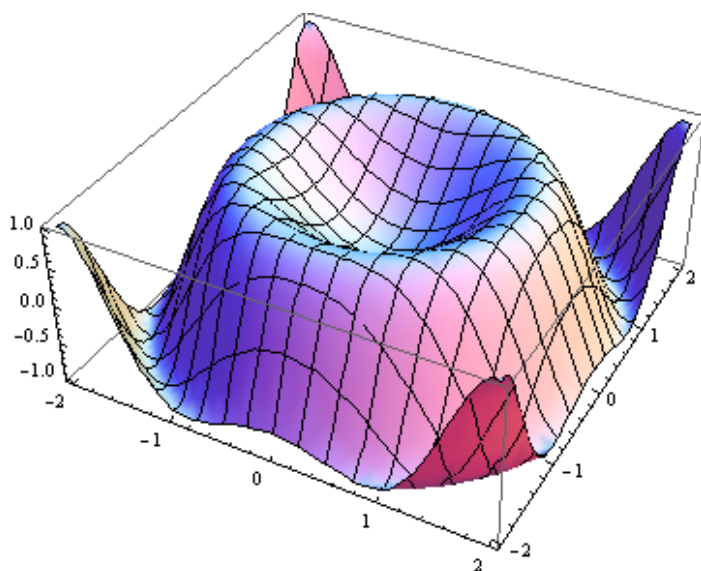
Point [{x, y, z}]	tačka sa koordinatama (x, y, z)
Line [{{x ₁ , y ₁ , z ₁ }, {x ₂ , y ₂ , z ₂ }, ...}]	linija kroz tačke {x ₁ , y ₁ , z ₁ }, {x ₂ , y ₂ , z ₂ }, ...
Polygon [{{x ₁ , y ₁ , z ₁ }, {x ₂ , y ₂ , z ₂ }, ...}]	poligon sa zadatom listom temena
Cuboid [{xmin, ymin, zmin}, {xmax, ymax, zmax}]	paralelopiped
Text [expr, {x, y, z}]	tekst na poziciji {x, y, z}
Cuboid [{x, y, z}]	jedinična kocka sa naspramnim temenima koja imaju koordinate {x, y, z} i {x+1, y+1, z+1}

U trodimenzionalnom grafiku mogu se podešavati različiti parametri. Opcije za trodimenzionalne grafike i njihove standardne vrednosti su:

AmbientLight	GrayLevel[0]	osvetljenje trodimenzionalnog grafika
Axes	True	iscrtavanje koordinantnih osa
AxesLabel	None	oznake za koordinantne ose
Boxed	True	iscrtavanje grafika unutar kvadra
BoxRatios	{1,1,.4}	odnos dimenzija stranica kvadra
FaceGrids	None	iscrtavanje pomoćnih linija na stranama kvadra
Lighting	True	za senčenje grafika (koristi simulirano osvetljenje)
LightSources		postavljanje izvora svetlosti
Mesh	True	iscrtavanje mreže na grafiku
PlotLabel	None	naslov grafika
PlotPoints	15	broj tačaka u oba pravca u kojima se računa vrednost funkcije
PlotRange	Automatic	oblast grafika koja se prikazuje
Shading	True	senčanje grafika
ViewPoint	{1.3,-2.4,2}	koordinate tačke iz koje se posmatra grafik

Primer.

`Plot3D[Sin[x^2+y^2],{x,-2,2},{y,-2,2}]`



PARAMETARSKI ZADATE KRIVE I POVRŠI

Funkcijom *Plot* se crtaju krive kod kojih je y koordinata svake tačke zadata kao funkcija x koordinate. *Mathematica* takođe može da crta parametarski zadate krive, kod kojih su x i y koordinate svake tačke zadate kao funkcije jednog parametra.

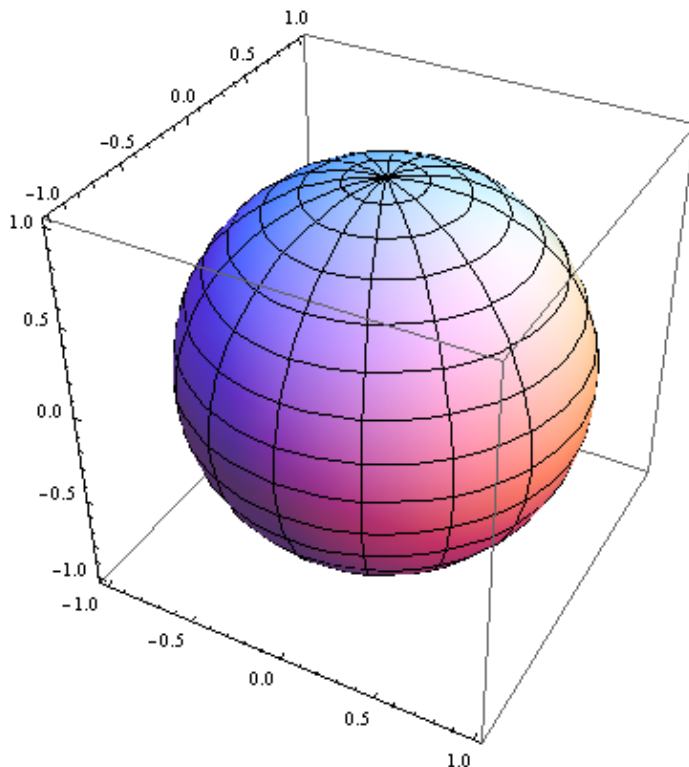
ParametricPlot[{f_x, f_y},{t, t_{min}, t_{max}}]	crtanje parametarski zadate krive
ParametricPlot[{f_x, f_y},{g_x, g_y},...,{t, t_{min}, t_{max}}]	crtanje više parametarski zadatih krivih zajedno

I u tri dimenzije se mogu crtati parametarski zadate krive i površi. Krive su određene sa tri funkcije parametra t , koje određuju koordinate tačaka krive. Površi se zadaju preko tri funkcije parametara u i t . Pri zadavanju površi treba obratiti pažnju na pravilnu parametrizaciju. Granice parametara u i t treba postaviti tako da se svi delovi površi pokriju samo jednom, jer u suprotnom iscrtavanje može da potraje mnogo duže.

ParametricPlot3D [{ f_x, f_y, f_z }, { $t, t_{\min}, t_{\max}$ }]	crtanje parametarski zadate krive u tri dimenzije
ParametricPlot3D [{ f_x, f_y, f_z }, { $t, t_{\min}, t_{\max}$ }, { $u, u_{\min}, u_{\max}$ }]	crtanje parametarski zadate površi
ParametricPlot3D [{ $\{f_x, f_y, f_z\},$ { $g_x, g_y, g_z\}, \dots\}, \dots]$	crtanje više krivih ili površi zajedno

Primer.

ParametricPlot3D[{Cos[t]Cos[u], Sin[t]Cos[u], Sin[u]},
{t, 0, 2Pi}, {u, -Pi/2, Pi/2}]



LITERATURA

1. P.S. Stanimirović, G.V. Milovanović, *Programski paket Mathematica i primene*, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, 2002.
<http://gauss-megatrend.edu.rs/books.html>)
2. S. Wolfram, *The Mathematica Book*, 5th ed., Wolfram media, 2003.